ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MINH HIẾU

BÀI TOÁN CÂN BẰNG VỚI SONG HÀM GIẢ ĐƠN ĐIỆU MẠNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ MINH HIẾU

BÀI TOÁN CÂN BẰNG VỚI SONG HÀM GIẢ ĐƠN ĐIỆU MẠNH

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy GS. TSKH Lê Dũng Mưu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam), người đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên em trong suốt thời gian nghiên cứu và viết luận văn vừa qua.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán ứng dụng K7A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu xót và hạn chế, rất mong nhận được sự đóng góp quý báu của quý thầy, cô cùng toàn thể bạn đọc.

NGUYỄN THỊ MINH HIẾU

Học viên Cao học Toán K7A,

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Danh sách ký hiệu

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định dưới đây:

$\mathbb{N}$	tập số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert
$\langle a, b \rangle$	tích vô hướng của vectơ a và b
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm f tại x
$P_C(x)$	hình chiếu (theo chuẩn) của x lên tập C

Mở đầu

Bài toán cân bằng hay còn gọi là bất đẳng thức Ky Fan là một đề tài hiện nay đang được quan tâm nghiên cứu, do bài toán này có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Hơn nữa nhiều bài toán quan trọng như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Brouwer, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác đều có thể mô tả dưới bài toán cân bằng.

Một trong những hướng nghiên cứu được quan tâm nhiều là các phương pháp giải thông thường. Để xây dựng được các phương pháp giải, người ta phải có những điều kiện đặt lên song hàm của bài toán, một điều kiện thường được sử dụng là tính đơn điệu của song hàm.

Bản luận văn này nhằm mục đích tổng hợp những kiến thức cơ bản nhất về bài toán cân bằng. Luận văn nghiên cứu bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu mạnh. Cụ thể luận văn đề cập tới sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, hơn nữa luận văn còn giới thiệu một số thuuật toán để giải bài toán đơn điệu mạnh. Cuối cùng giới thiệu một mô hình sản xuất điện.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015

Nguyễn Thị Minh Hiếu
Học viên Cao học Toán K7A
Chuyên ngành Toán ứng dụng
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Email: ntmhieu.gv08@tuyenquang.edu.vn

Chương 1

Bài toán cân bằng

Trong chương này chúng ta giới thiệu bài toán cân bằng và trình bày một số trường hợp riêng điển hình của bài toán này. Tiếp đến ta khảo sát một số tính chất của đơn điệu, đặc biệt là song hàm giả đơn điệu mạnh. Cuối chương xét đến sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu mạnh. Các kết quả của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

1.1 Bài toán cân bằng và các trường hợp riêng

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực với Tôpô yếu được xác định bởi tích vô hướng $\langle . \rangle$ ứng với chuẩn $\|.\|$. Giả sử C là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và một song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Một hàm f như vậy gọi là song hàm cân bằng.

Chúng ta xét bài toán cân bằng được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f\left(x^*, x\right) \geq 0,\ \forall x \in C. \tag{EP}$$

Bài toán này lần đầu tiên được đưa ra vào năm 1955 bởi H. Nikaido, K. Isoda nhằm tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác và vào năm 1972, được Ky Fan giới thiệu năm 1972 và thường được gọi là bất đẳng thức Ky Fan.

Bài toán (EP) còn được đặt tên là bài toán cân bằng bởi tác giả L. D Muu và W. Oettli năm 1992, E. Blum và W. Oettli giới thiệu năm 1994;

Bài toán cân bằng (EP) bao gồm một số bài toán như: bài toán tối ưu hóa, điểm yên ngựa, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động và mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác v.v...

1.1.1 Bài toán tối ưu

Xét bài toán $\min \{\varphi(x) : x \in C\}$. Đặt

$$f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x).$$

Khi đó

$$\varphi(x) \leq \varphi(y),\ \forall y \in \mathrm{C} \Leftrightarrow f(x, y) \geq 0,\ \forall y \in C$$

Vậy bài toán tối ưu trên là một trường hợp riêng của bài toán (EP).

1.1.2 Bài toán điểm bất động Brouwer

Giả sử $C \subset \mathcal{H}$ là một tập lồi compact khác rỗng và ánh xạ đơn trị $F : C \to C$. Khi đó bài toán điểm bất động có dạng sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } x^* = F(x^*). \tag{FP}$$

Đặt

$$f(x, y) = \langle x - F(x), y - x \rangle,\ \forall x, y \in \mathrm{C}.$$

Khi đó bài toán (FP) trở thành bài toán cân bằng (EP).

Tổng quát hơn, bài toán điểm bất động của ánh xạ đa trị (MFP) là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } x^* \in F(x^*),$$

với $F : C \to 2^C$ là ánh xạ đa trị có giá trị lồi compact khác rỗng.

Khi đó, $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (MFP) khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán cân bằng (EP).

1.1.3 Bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát

Cho $T : C \to 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ nửa liên tục sao cho $T(x)$ là tập compact, lồi $\forall x \in C$. Khi đó, *bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát* được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C,\ \xi^* \in T(x) \text{ sao cho } \langle \xi^*, y - x \rangle \geq 0,\ \forall y \in C. \tag{1.1}$$

Nếu ta đặt

$$f(x, y) := \max_{\xi \in T(x)} \langle \xi, y - x \rangle,\ \forall x, y \in C$$

thì bài toán cân bằng (EP) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát.

Thật vậy, vì $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (1.1) nên ta có:

$$\langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0,\ \forall y \in C,\ \xi^* \in T(x^*).$$

Mặt khác theo cách đặt ta được:

$$f(x^*, y) = \max_{\xi^* \in T(x^*)} \langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Vậy $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (EP). Ngược lại, cho $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán (EP), nghĩa là